

ILPES



NACIONES UNIDAS

CEPAL



Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão
Secretaria de Planejamento e Investimentos Estratégicos

AJUSTE COMPLEMENTAR ENTRE O BRASIL E CEPAL/ILPES

POLÍTICAS PARA GESTÃO DE INVESTIMENTOS PÚBLICOS

CURSO DE AVALIAÇÃO SOCIOECONÔMICA DE PROJETOS

APOSTILA

MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA AVALIAÇÃO DE PROJETOS

Claudia Botteon

BRASÍLIA, MAIO DE 2009

CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA AVALIAÇÃO DE PROJETOS

A. Valor do dinheiro ao longo do tempo	2
B. Os juros e as taxas de juros	3
1. Métodos de fixação do dinheiro a juros compostos	3
2. Equivalência das taxas de juros	4
3. Relação entre a taxa nominal anual e a taxa anual efetiva	5
C. Valor presente e valor futuro	6
4. Valor futuro do dinheiro atual	6
5. Valor presente ou valor atual da soma futura do dinheiro	7
6. Valor presente de uma série de futuras somas de dinheiro diferentes umas das outras	8
7. Valor presente de um plano de prestações ou parcelas iguais e uniformemente distribuídas	8
8. Valor presente de um plano de n prestações vencidas	9
9. Valor presente de um plano de n anualidades adiantadas e deferidas	10
10. Valor presente de um plano de perpetuidades vencidas	11
11. Valor presente de um plano de perpetuidades adiantadas e deferidas	12
12. Valor presente de um plano de prestações crescentes ou decrescentes a uma taxa constante	12
D. Bibliografia	15

CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA AVALIAÇÃO DE PROJETOS¹

Para decidir sobre a oportunidade de execução de um projeto é essencial ter o fluxo de benefícios e custos atribuíveis a ele. Este fluxo é composto por itens cujos valores são distribuídos ao longo do tempo. É por isso que a informação monetária contida no projeto deve ser expressa no mesmo momento, ou seja, resumida nos denominados indicadores de rentabilidade ou viabilidade.

Fórmulas matemáticas são um importante elemento financeiro na avaliação de um projeto, permitindo a homogeneização do fluxo de informações. Abaixo estão os seguintes conceitos básicos de matemática financeira:

- Valor do dinheiro ao longo do tempo.
- Juros e taxas de juros.
- Valores atuais e futuros em um único valor monetário e de uma série de valores iguais ou diferentes.

A. Valor do dinheiro ao longo do tempo

Um dos erros mais comuns na avaliação dos projetos é a falta de distinção entre o tempo e o período:

- Tempo é um momento.
- Período é um tempo decorrido entre dois pontos ou eventos do projeto.

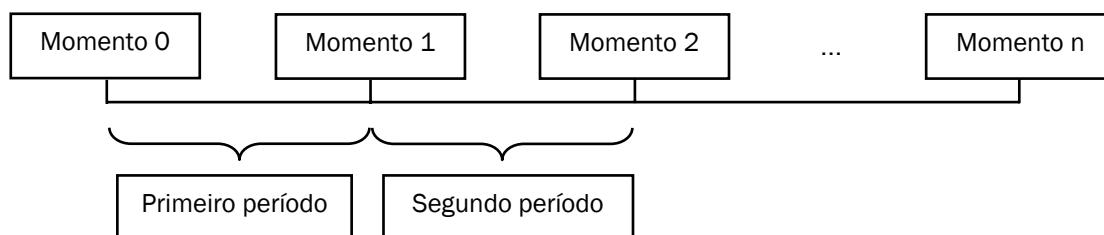
Embora os benefícios e os custos de um projeto sejam gerados ao longo de um período, eles ocorrem num determinado momento. Por exemplo, o salário mensal de um trabalhador para o mês de janeiro de 2009 é gerenciado ao longo de todo esse mês, sendo que, normalmente, só é pago ao final do mesmo.

É por isso que quando da identificação dos benefícios e custos de um projeto deve ser determinado quando o mesmo ocorrerá. A importância deste procedimento é que o valor atribuído hoje por uma pessoa a um real é maior do que o valor dado a um real disponível no futuro.

Embora existam várias razões para que a mesma quantia de dinheiro seja avaliada em momentos distintos, de formas diferentes, o mais importante é a existência de investimentos alternativos para esse dinheiro. Um real recebido hoje é mais valioso do que um a receber no futuro, porque pode ser investido durante o período de tempo considerado.

¹ Esta seção é inspirada do livro de Coloma Ferrá e Claudia Botteon "Evaluación proyectos privados" (2007).

O seguinte esquema é temporal e de um projeto cuja vida é dividida em n períodos:



Se fosse um esquema mensal, o projeto seria de n meses. O Momento 0 corresponde ao início do primeiro mês; o Momento 1, ao final desse período e início do segundo mês. Voltando ao exemplo do salário mensal, que é pago ao trabalhador, o valor deve ser inserido do Momento 1 em diante.

Além disso, se um fornecedor vende para o projeto durante dois meses, o primeiro pagamento a ser feito deve ser registrado no final do segundo mês (Momento 2 de um calendário mensal).

B. Os juros e as taxas de juros

O rendimento financeiro gerado ao investidor por um recurso aplicado em determinado período de tempo é chamado juros.

A taxa de juros é proveniente da relação entre os juros (I) e o capital inicial (A):

$$i = \frac{I}{A}.$$

Por exemplo, se o capital inicial é de R\$ 100 e os juros são de R\$ 30, a taxa de juros (i) é igual a:

$$i = \frac{\text{R\$ } 30}{\text{R\$ } 100} = 0,3 = 30\%.$$

Quando se menciona uma taxa de juros, é necessário indicar o período a que ela se refere. Por exemplo: se o rendimento de R\$ 30 é obtido após um ano, 30% é uma taxa de juros anual.

1. Métodos de fixação do dinheiro a juros compostos²

Sob a forma de juros compostos, os periódicos são capitalizados em períodos regulares (adicionado ao capital) e, assim, começam a gerar novos juros.

² Cabe recordar que existe uma modalidade de aplicação de recursos a juros simples. Nessa modalidade, os juros nunca se tornam parte do capital. O leitor pode estudar a modalidade de juros simples em Coloma, Ferrá e Claudia Botteon (2007), op cit.

Exemplo 1

Suponha que uma pessoa peça um empréstimo de R\$ 1.000 a um banco que cobra uma taxa de juros de 4% no semestre e que deva ser pago após 3 semestres, acrescido dos juros que se acumularam até o último momento.

A tabela abaixo resume os juros acumulados, que são capitalizados semestralmente, e o montante a ser reembolsado após 3 semestres:

Período	Dívida ao início do semestre	Juros semestrais	Dívida ao final do semestre
1	1.000,00	40,00	1.040,00
2	1.040,00	41,60	1.081,60
3	1.081,60	43,26	1.124,86

Os juros semestrais são crescentes, pois foram calculados sobre o capital inicial acrescido dos juros capitalizados.

O montante total a ser pago no final de 3 semestres é de R\$ 1.124,86, e pode ser obtido com a aplicação da seguinte fórmula:

$$MT = A \cdot (1+i)^n. \quad (1)$$

onde MT é o montante total a ser pago e n é o número de períodos que decorre entre o momento em que se recebe o empréstimo e os prazos para ser reembolsado com juros.

2. Equivalência das taxas de juros

Encontrar taxas de juros equivalentes é um procedimento útil para avaliação de projetos. Isto porque, se o fluxo de um projeto tem distribuição mensal, o cálculo dos seus indicadores de rentabilidade necessita de uma taxa de juros mensal. No entanto, se sua distribuição for anual, os indicadores vão exigir taxa de juros anuais.

Para que duas taxas de juros e diferentes períodos sejam equivalentes entre si, uma aplicação delas sobre um mesmo capital inicial deve produzir o mesmo montante total, coincidente com o lapso de tempo do investimento.

A equivalência entre as taxas pode ser visualizada tanto no Exemplo 1, quanto na fórmula (1).

- Uma taxa semestral de 4%, aplicada a um capital de R\$ 1.000, obtém, no prazo de 3 semestres, um montante total igual a R\$ 1.124,86: $MT = 1.000 \cdot (1,04)^3 = R\$ 1.124,86$. A fórmula utiliza a taxa semestral de 4% e o número de semestres (três) de duração da operação.
- A taxa trimestral de 1,9804% aplicada a R\$ 1.000 gera, após seis trimestres, o mesmo resultado: $MT = 1.000 \cdot (1,09804)^6 = R\$ 1.124,86$. A fórmula considera uma taxa trimestral de 1,9804% e o número de trimestres (seis) de duração da operação.

Isto implica que as taxas de 4% semestral e 1,9804% trimestral são equivalentes.

É importante notar que as taxas são efetivas, o que significa que são as verdadeiras taxas pagas pela pessoa que recebe o empréstimo.

A fórmula geral que permite transformar uma taxa efetiva em outra é a seguinte:

$$(1+i_w)^{\frac{1}{w}} = (1+i_z)^{\frac{1}{z}}, \text{ onde: } i_w = (1+i_z)^{\frac{w}{z}} - 1. \quad (2)$$

onde i_w e i_z são as taxas relativas a um período de w e z de unidades de tempo, respectivamente.

Por exemplo, se i_{30} é a taxa de juros correspondente a 30 dias, a taxa efetiva correspondente a 45 dias (i_{45}), pode ser calculada como segue:

$$(1+i_{30})^{\frac{1}{30}} = (1+i_{45})^{\frac{1}{45}}, \text{ onde: } i_{45} = (1+i_{30})^{\frac{45}{30}} - 1.$$

Como pode ser visto na aplicação da fórmula, a unidade de tempo de referência deve ser a mesma para ambas alternativas (um dia, no caso ilustrado).

Para calcular a taxa efetiva semestral (i_s) equivalente a uma taxa efetiva bimestral (i_b) pode ser feito como segue:

$$(1+i_b)^{\frac{1}{2}} = (1+i_s)^{\frac{1}{6}}, \text{ onde: } i_s = (1+i_b)^3 - 1.$$

No procedimento anterior foi utilizado o mês como unidade de tempo de referência.

A taxa estimada para um ano é denominada como taxa efetiva anual (TEA). Por exemplo, a TEA pode ser calculada a partir da taxa mensal (i_m); para cálculo da taxa efetiva semestral (i_s) equivalente a uma taxa efetiva bimestral (i_b), pode-se fazer o seguinte:

$$(1+i_m)^{12} = (1+TEA)^{\frac{1}{12}}, \text{ que é: } TEA = (1+i_m)^{12} - 1.$$

3. Relação entre a taxa nominal anual e a taxa anual efetiva

Ao proporcionar uma forma de depósito ou empréstimo, sistemas bancários dão informações utilizando a taxa anual nominal (TNA). Esta taxa é apenas um ponto de referência para a taxa de 365 dias, a partir da qual a TEA pode ser calculada.

Em uma TNA de 20% para depósitos a prazo de 30 dias, os juros sobre a operação são calculados utilizando a taxa normal 30 dias (TP_{30}), que é determinado na proporção da TNA. Dado que a TNA é 365 dias, a taxa regular para 30 dias, será:

$$TP_{30} = \frac{0,20}{365} \cdot 30 = 1,6438\%.$$

Esta é uma taxa efetiva periódica para os 30 dias porque, na verdade, é o que o banco aplica nos depósitos deste período:

$$TP_{30} = i_{30}.$$

Se o dinheiro permanece depositado ao longo de um ano, a verdadeira taxa anual paga pelo banco não é 20%, mas a taxa anual igual ao TP_{30} , calculada pela seguinte fórmula (2):

$$TEA = (1 + TP_{30})^{\frac{365}{30}} - 1 = (1,016438)^{\frac{365}{30}} - 1 = 21,942\%.$$

Como pode ser visto, a unidade de tempo definida para a capitalização de juros é um elemento essencial para cálculo da TEA, já que se o período de capitalização for diferente, o resultado também será.

Usando os dados do exemplo, a capitalização de juros ocorre a cada 60 dias (ao invés a cada 30 dias), a taxa periódica de 60 dias (TP_{60}) e a TEA são iguais a 3,2877% e 21,7479%, respectivamente.

$$TP_{60} = \frac{0,20}{365} \cdot 60 = 3,2877\% \quad \text{e} \quad TEA = (1 + TP_{60})^{\frac{365}{60}} - 1 = (1,032877)^{\frac{365}{60}} - 1 = 21,7479\%.$$

Se o período de capitalização for de 365 dias, a TNA coincide com a taxa efetiva correspondente ao mesmo lapso. A TEA é igual a 20%.

Há ocasiões em que as taxas efetivas necessárias não são anuais. Isto é fácil de ser resolvido, porque quando considerada a TEA as taxas efetivas equivalentes correspondentes a períodos de um ano podem ser calculadas.

C. Valor presente e valor futuro

Abaixo estão algumas fórmulas úteis para a avaliação de um projeto:

4. Valor futuro do dinheiro atual

O valor futuro em n períodos de uma soma de dinheiro é obtido pela capitalização dos juros vencidos nestes n períodos. A fórmula para calcular o valor futuro é a (1), e é indicada para determinar o montante total sob a forma de juros compostos.

$$VF_n = VP \cdot (1 + i)^n. \tag{2}$$

Note-se que MT (montante total) foi substituído por VF (valor futuro), e A (capital inicial investido) pelo VP (valor atual ou valor presente), uma vez que estas expressões são utilizadas na avaliação de projetos.

Quando se determina um valor futuro é necessário indicar o exato momento em que ele é calculado.

Como ocorre para qualquer fórmula de matemática financeira, deve haver correlação entre o número de períodos durante os quais o montante de dinheiro gera juros e a taxa efetiva de juros correspondente a cada período.

Exemplo 2

Para determinar hoje o valor futuro de R\$ 100 após um ano caso a taxa efetiva semestral seja de 10%.

Optando por trabalhar com um prazo de seis meses, deve ser utilizada a taxa efetiva semestral, sendo que n assume o valor 2 (número de semestres em um ano). O valor futuro no momento 2 de um calendário semestral é o seguinte:

$$VF_2 = 100 \cdot (1,1)^2 = \text{R\$ } 121.$$

Também se pode trabalhar com períodos anuais: n assume o valor 1 e deve ser utilizada a taxa efetiva anual equivalente à taxa efetiva semestral de 10%, o que equivale a 21%. O valor futuro do primeiro momento de um calendário anual é:

$$VF_1 = 100 \cdot (1,21)^1 = \text{R\$ } 121.$$

Exemplo 3

Deseja-se determinar hoje o valor futuro após 14 meses de R\$ 100, a uma taxa efetiva semestral de 10%.

Neste caso, pode ser desejável transformar a taxa efetiva semestral em uma taxa efetiva mensal (1,6012%). O valor futuro no momento 14 de um calendário mensal é:

$$VF_{14} = 100 \cdot (1,016012)^{14} = \text{R\$ } 124,91.$$

Exemplo 4

A fórmula de valor futuro pode ser adaptada para o caso em que a taxa de juros não permaneça constante através do tempo.

Para calcular o valor futuro de R\$ 100 após 6 meses, agora colocadas as taxas efetivas mensais (i_m) de 1% durante os primeiros 4 meses e de 1,5% durante os meses restantes:

$$VF_6 = 100 \cdot (1,01)^4 \cdot (1,015)^2 = \text{R\$ } 107,21$$

Ou seja, os R\$ 100 são capitalizados a 1% ao mês durante os primeiros quatro meses e a 1,5% durante os 2 meses posteriores.

5. Valor presente ou valor atual da soma futura do dinheiro

O valor presente refere-se à quantidade de dinheiro que deve ser aplicada a juros durante um determinado momento ou após n períodos.

A fórmula para o valor atual resulta da fórmula (3) e é igual a:

$$VP = \frac{VF_n}{(1+i)^n}. \quad (3)$$

Exemplo 5

Para determinar o valor presente dos R\$ 400 que serão recebidos daqui a um ano, se a taxa efetiva for de 2% a cada dois meses:

$$VP = \frac{400}{(1,02)^6} = \text{R\$ } 355,19.$$

De outra forma, se hoje aplicarmos R\$ 355,19 a 2% por bimestre, vamos obter R\$400 após um ano.

Exemplo 6

Neste caso, a aplicação da fórmula à situação em que a taxa de juros não é constante ao longo do tempo considerado.

O valor presente de R\$ 400 a receber após um ano, se as taxas efetivas bimestrais vigentes forem de 1,5% para os primeiros 4 primeiros bimestres e de 2% para os restantes, é igual a:

$$VP = \frac{400}{(1,015)^4 \cdot (1,02)^2} = \text{R\$ } 362,24.$$

6. Valor presente de uma série de futuras somas de dinheiro diferentes umas das outras

Se em vez de uma única soma de dinheiro, elas forem de valor diferente, o valor atual do conjunto de recursos é obtido pela adição dos valores atuais de cada um.

Se a taxa efetiva anual for de 10%, o valor presente de dos dois valores no futuro, R\$ 200 no prazo de um ano e R \$ 300 dentro de dois anos, é determinado como segue:

$$VP = \frac{200}{(1,10)} + \frac{300}{(1,10)^2} = \text{R\$ } 429,75.$$

Ou seja, para obter essas duas retiradas nos momentos indicados, R \$ 429,75 devem ser depositados hoje.

7. Valor presente de um plano de prestações ou parcelas iguais e uniformemente distribuídas

O plano de prestações iguais pode ser classificado de acordo com o número de prestações ou parcelas e, no momento do pagamento da primeira.

Dependendo do número de prestações são chamados de:

- Plano de anuidade, quando o número de prestações é finito.
- Plano de perpetuidades: quando se trata de prestações intermináveis.

A classificação das prestações tendo em conta o momento de pagamento da primeira, contado a partir do momento de execução da operação, exige que os prazos sejam definidos de acordo com o calendário das prestações. Eles são chamados:

- Plano de prestações vencidas: quando a primeira é paga ao final do primeiro período. Por exemplo, se as prestações são mensais, o plano é vencido quando a primeira é paga ao final do primeiro mês.
- Plano de prestações avançadas (prestações adiantadas): quando a primeira é paga no início do primeiro período. Por exemplo, se as parcelas são prestações mensais, o plano é de prestações avançadas se a primeira é paga no início do primeiro mês.
- Plano de prestações diferidas: quando a primeira cota é paga em algum momento futuro que não seja o final do primeiro período. Por exemplo, se as prestações são mensais, o plano é de prestações diferidas se a primeira é paga no final do segundo mês ou mais tarde. Se as prestações são bimestrais, a primeira é paga no final do primeiro mês.

8. Valor presente de um plano de n prestações vencidas

As n anualidades vencidas são distribuídas no tempo segundo o seguinte calendário:

Conceito	0	1	2	...	n
Distribuição das prestações		C	C	C	C

onde C é o valor de cada cota.

O valor presente deste conjunto de n prestações é:

$$VP = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C}{(1+i)^n}. \quad (5)$$

Para chegar a uma fórmula de cálculo mais simples, se multiplicam os dois membros por (1+i):

$$VP \cdot (1+i) = C + \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C}{(1+i)^{n-1}}. \quad (6)$$

A diferença entre (6) e (5) é igual a:

$$VP \cdot (1+i) - VP = C - \frac{C}{(1+i)^n},$$

surge assim a seguinte fórmula:

$$VP = \frac{C}{i} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}. \quad (7)$$

onde n é o número de prestações.

Para aplicar corretamente a fórmula deve existir correlação entre a frequência das prestações e a taxa efetiva utilizada. Ou seja, se as prestações forem bimestrais, a taxa utilizada é a efetiva bimestral.

9. Valor presente de um plano de n anualidades adiantadas e deferidas

A fórmula (7) obtida para o caso de prestações vencidas, pode ser adaptada aos efeitos do cálculo do valor atual dos planos de prestações adiantadas ou diferidas.

Anuidades adiantadas são n e distribuídas ao longo do tempo, como segue:

Conceito	0	1	2	...	n-1	n
Distribuição das prestações	C	C	C	C	C	

Ao usar a fórmula (7) sem nenhuma modificação, o valor resultante é expresso no momento correspondente a um período anterior da primeira cota, neste caso, o momento -1. Para que este valor seja expresso no momento 0, a fórmula deve ser corrigida, capitalizando o valor resultante de uma aplicação direta durante um período:

$$VP = \frac{C}{i} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] \cdot (1+i) = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \cdot (1+i) \quad (4)$$

Como existem muitas variantes de plano de prestações diferidas, se apresenta o seguinte caso:

Conceito	0	1	2	...	n	n+1
Distribuição das prestações			C	C	C	C

Como pode ser visto, a primeira cota é paga no final do segundo período. Isto implica que, ao usar (7) para atualizar, o valor resultante é expresso no momento 1. Neste caso, para que este valor se expresse no momento 0, é necessário atualizar o resultado por um período e aplicar esta fórmula diretamente. A fórmula é:

$$VP = \frac{C}{i} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] \cdot \frac{1}{(1+i)} = C \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1} \cdot i}$$

Um exemplo que permite aplicar a fórmula (7) e mostrar as modificações que devem ser feitas em alguns casos:.

Exemplo 7

Para calcular o valor atual de um conjunto de 6 prestações semestrais, iguais e consecutivas de R\$ 300, a taxa efetiva relevante é de 1% mensal.

Como as prestações são semestrais, é necessário usar a taxa efetiva semestral equivalente à efetiva mensal de 1% na fórmula (7): 6,152%.

Se as prestações são vencidas, o valor atual é calculado diretamente, usando a fórmula (7):

$$VP = 300 \cdot \left[\frac{(1,06152)^6 - 1}{(1,06152)^6 \cdot 0,06152} \right] = \text{R\$ } 1.468,18.$$

Se as prestações são adiantadas, o valor atual é:

$$VP = 300 \cdot \left[\frac{(1,06152)^6 - 1}{(1,06152)^6 \cdot 0,06152} \right] \cdot 1,06152 = \text{R\$ } 1.558,50.$$

Se a primeira cota semestral for paga no final do quarto mês de concretizada a operação, o valor atual do plano é:

$$VP = 300 \cdot \left[\frac{(1,06152)^6 - 1}{(1,06152)^6 \cdot 0,06152} \right] \cdot (1,01)^2 = \text{R\$ } 1.497,69.$$

Ou seja, o resultado da aplicação da fórmula (7) é expresso no momento -2 de um calendário mensal (um semestre antes da primeira cota). Isto implica que, para determinar o valor atual, devem ser capitalizados os juros desses 2 meses.

Se a primeira cota semestral for paga no final do décimo mês, resulta:

$$VP = 300 \cdot \left[\frac{(1,06152)^6 - 1}{(1,06152)^6 \cdot 0,06152} \right] \cdot (1,01)^{-4} = \text{R\$ } 1.410,89.$$

A fórmula (7) calcula um valor expresso no momento 4 de um calendário mensal. Isto implica que, para determinar o valor atual, esse resultado deve ser atualizado com o desconto dos juros referentes a esses 4 meses.

10. Valor presente de um plano de perpetuidades vencidas

O seguinte esquema permite visualizar graficamente o fluxo de perpetuidades vencidas:

Conceito	0	1	2	...	∞
Distribuição das prestações		C	C	C	C

Se a fórmula (7) de anuidades vencidas considera que n tende ao infinito, a expressão resultante é o valor presente de um plano de perpetuidades vencidas:

$$VP = \frac{C}{i}. \tag{9}$$

A aplicação da fórmula (9) é muito simples e é apresentada com um exemplo numérico.

Exemplo 8

Para calcular o valor presente de um plano de perpetuidades bimestrais vencidas de R\$ 25, iguais e consecutivas, se a taxa efetiva mensal for de 1%.

Como a perpetuidade é bimestral, ao aplicar (9) deve-se usar a taxa efetiva bimestral equivalente à efetiva mensal de 1%: 2,01%.

O valor presente de todas as prestações é igual a:

$$VP = \frac{25}{0,0201} = \text{R\$ } 1.243,78.$$

11. Valor presente de um plano de perpetuidades adiantadas e deferidas

Como feito no caso de prestações, a fórmula (9) pode ser modificada para aplicação nos casos de perpetuidades adiantadas ou diferidas.

O valor presente deste plano de perpetuidades adiantadas é obtido com a capitalização, por um período, do valor resultante da aplicação da fórmula (9):

$$VP = \frac{C}{i} \cdot (1 + i).$$

Por exemplo, se as perpetuidades bimestrais do plano anterior forem adiantadas, o valor atual é igual a:

$$VP = \frac{25}{0,0201} \cdot (1,0201) = \text{R\$ } 1.268,78.$$

Se a primeira das perpetuidades bimestrais de R\$ 25 for paga no final do décimo mês, seu valor presente é:

$$VP = \frac{25}{0,0201} \cdot \frac{1}{(1,01)^8} = \text{R\$ } 1.148,61.$$

Ao usar a fórmula (9) inalterada, é calculado o valor no momento 8 de um calendário mensal. Por isso, sua atualização precisa considerar esses 8 meses.

12. Valor presente de um plano de prestações crescentes ou decrescentes a uma taxa constante

Existe uma fórmula para cálculo do valor atual do plano de n prestações vencidas que crescem a uma taxa constante δ a partir do momento 1:

Conceito	0	1	2	...	n
Distribuição das prestações		C	C·(1+ δ)	...	C·(1+ δ) ⁿ⁻¹

Como se pode ver C é o valor correspondente à primeira prestação.

O valor atual deste conjunto de n prestações é:

$$VP = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C \cdot (1+\delta)}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C \cdot (1+\delta)^{n-1}}{(1+i)^n}. \quad (10)$$

Para encontrar o valor presente do plano, ambos os membros de (10) são multiplicados por $\frac{(1+i)}{(1+\delta)}$:

$$VP \cdot \frac{(1+i)}{(1+\delta)} = \frac{C}{(1+\delta)} + \frac{C}{(1+i)} + \frac{C \cdot (1+\delta)}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C \cdot (1+\delta)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}}. \quad (11)$$

A diferença entre (11) e (10) é:

$$VP \cdot \left[\frac{(1+i)}{(1+\delta)} - 1 \right] = \frac{C}{(1+\delta)} - \frac{C \cdot (1+\delta)^{n-1}}{(1+i)^n},$$

Onde:

$$VP = \frac{C}{i-\delta} \cdot \left[1 - \frac{(1+\delta)^n}{(1+i)^n} \right] = C \cdot \frac{(1+i)^n - (1+\delta)^n}{(1+i)^n \cdot (i-\delta)}. \quad (12)$$

É interessante notar que se as prestações forem decrescentes a taxa δ , a partir do momento 1, deve ser substituída δ por $(-\delta)$.

Se na fórmula (12) se considera que n assume o valor de infinito, se determina o valor presente de um conjunto de perpetuidades vencidas e crescentes:

$$VP = \frac{C}{i-\delta}. \quad (13)$$

A fórmula (13) só é válida se $i > \delta$.

Se δ é zero, as fórmulas (12) e (13) coincidem com as fórmulas (7) e (9), aplicadas em prestações e perpetuidades constantes.

Exemplo 9

Esta fórmula pode ser usada para calcular o valor presente dos benefícios líquidos sociais atribuíveis a um projeto de expansão de uma estrada. Considera-se que esses benefícios cresçam em função do tempo calendário, independentemente do momento em que se expanda a estrada. A taxa de crescimento dos benefícios líquidos é 2% anual e o benefício líquido de trânsito no primeiro ano calendário é de R\$ 95.000. A taxa de desconto social é de 10% anual.

Se a construção for hoje e gerar infinitos benefícios desde o final do primeiro ano, o fluxo anual de benefícios é o seguinte:

Conceito	0	1	2	3	4 a ∞
Benefício líquido de transitar		95.000	96.900	98.838	...

Seu valor presente é: $VP = \frac{95.000}{(0,1 - 0,02)} = \text{R\$ } 1.187.500.$

Se sob as mesmas condições, o projeto gera só 20 benefícios, seu valor presente é:

$$VP = \frac{95.000}{(0,1 - 0,02)} \cdot \left[1 - \frac{(1,02)^{20}}{(1,1)^{20}} \right] = \text{R\$ } 925.209,02.$$

Exemplo 10

É possível modificar as fórmulas (12) e (13) para uso em outras situações.

Considera-se que o projeto do Exemplo 9 gerará seu primeiro benefício dentro de 3 anos (momento 3 do calendário anual). Se o número de benefícios for interminável, o fluxo relevante anual de benefícios é o seguinte:

Conceito	0	1	2	3	4 a ∞
Benefício líquido de transitar				98.838	...

Isto implica que nas fórmulas o valor que assume C (primeira quota) é R\$ 98.838 e o valor presente do conjunto é:

$$VP = \frac{98.838}{(0,1 - 0,02)} \cdot \frac{1}{(1,1)^2} = \text{R\$ } 1.021.053,72.$$

O valor resultante da aplicação direta da fórmula (13) fica expresso no final do segundo ano (momento 2), e, portanto, deve ser atualizado tendo em conta esses dois anos.

Se o projeto gera 20 benefícios, seu valor presente é:

$$VP = \frac{98.838}{(0,1 - 0,02)} \cdot \left[1 - \frac{(1,02)^{20}}{(1,1)^{20}} \right] \cdot \frac{1}{(1,1)^2} = \text{R\$ } 795.526,83.$$

Exemplo 11

Esta fórmula pode ser aplicada para o cálculo dos benefícios líquidos de um projeto de mineração. Neste tipo de projeto é provável que os benefícios líquidos sejam decrescentes, já que, à medida que se extrai mineral, se obtém menos quantidade de material por unidade de tempo (a mina vai se esgotando). Além disso, os custos aumentam ao ter que percorrer maior distância na mina.

Considera-se que o primeiro benefício anual é R\$ 10.000 e ocorre dentro de um ano. A partir daí começa a diminuir a uma taxa anual de 2%. Se seu número for igual a 20, o valor presente resultante é:

$$VP = \frac{10.000}{(0,1+0,02)} \cdot \left[1 - \frac{(0,98)^{20}}{(1,1)^{20}} \right] = \text{R\$ } 75.063,69.$$

Se os beneficios duram infinitamente:

$$VP = \frac{10.000}{(0,1+0,02)} = \text{R\$ } 83.333,33.$$

D. Bibliografia

BOTTEON, Claudia y FERRÁ, Coloma, Elementos de matemática financiera para la evaluación de proyectos, en Serie Estudios-Sección Economía N° 47 (Mendoza, FCE-UNC, 2005).

FERRÁ, Coloma y BOTTEON, Claudia, Evaluación privada de proyectos (Mendoza, FCE-UNC, 2007).

GUTIERREZ, Héctor, Evaluación de proyectos ante certidumbre (Santiago de Chile, Universidad de Chile, 1994).

HARBERGER, Arnold C., Técnicas de evaluación de proyectos, en "Serie Traducciones-Sección Economía", N° 81 (Mendoza, FCE-UNC, 1964).